



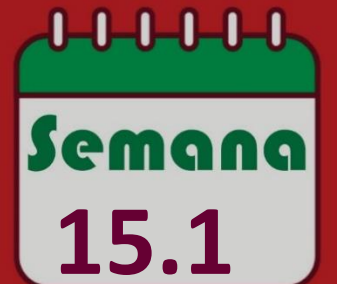
ce
pre
UNI

Álgebra

TEMA

SISTEMAS DE ECUACIONES
LINEALES

CICLO
PREUNIVERSITARIO
2024-1



CONTENIDO

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES $m \times n$

EXPRESION MATRICIAL DE UN SISTEMA LINEAL

MATRIZ AUMENTADA

TIPOS DE SISTEMAS

SISTEMAS EQUIVALENTES

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES 2×2 , INTERPRETACION GEOMETRICA Y METODOS DE SOLUCION

Sistema de Ecuaciones Lineales

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ (S.E.L de $m \times n$), es de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Donde los coeficientes $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ y $b_1, b_2, \dots, b_m$ son números reales conocidos.

Cuya representación en forma matricial es:

$$AX = b$$

donde: $A = (a_{ij})_{m \times n}$ es la matriz de coeficientes o matriz asociada al sistema.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ es la matriz de incógnitas}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ es la matriz de términos independientes}$$

Definición

Sea el sistema lineal $AX = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$. Se define la matriz aumentada o ampliada del sistema a la matriz de la forma:

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \mathbf{b}_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & \mathbf{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & \mathbf{b}_m \end{array} \right]$$

la cual es una matriz de orden $m \times (n + 1)$

Solución

Una n-upla $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ se llama solución del **S.E.L de m x n**, si:

$$\forall i, \quad a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i$$

Conjunto Solución

Se llama conjunto solución del **S.E.L de m x n**, al conjunto de todas las soluciones.

Sistema Compatible

Se dice que un **S.E.L de $m \times n$** , se llama consistente o compatible si posee alguna solución.

Ejemplo

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Sistema Incompatible

Se dice que un **S.E.L de $m \times n$** , se llama incompatible o inconsistente si no tiene solución.

Ejemplo

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + y = 6 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Sistema Homogéneo

Se dice que el **S.E.L** de $m \times n$ es homogéneo si $\forall i, b_i = 0$.

Ejemplo. Sea el sistema homogéneo:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 5z = 0 \\ 2x + 3y + 8z = 0 \end{cases}$$

Nota. Todo sistema homogéneo tiene solución, la cual es la solución trivial $(0, \dots, 0)$. En otras palabras, todo sistema homogéneo es compatible.

Sistemas Equivalentes

Dos sistemas de ecuaciones lineales $Ax = b$, $A'x = b'$ donde $A, A' \in R^{m \times n}$ y $b, b' \in R^{m \times 1}$ se dice que son equivalentes si existe una matriz $P \in R^{m \times m}$ invertible tal que:

$$A' = PA, b' = Pb$$

Nota. En otras palabras, se dice que dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si a partir de una aplicando operaciones elementales llegas a la otra.
Los sistemas equivalentes tienen el mismo conjunto solución.

Sistemas de 2 Ecuaciones Lineales con 2 Variables

Definición. Un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 variables es de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Donde los $a_{ij} \in \mathbb{R}$ son los coeficientes del sistema, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ y x, y son las variables.

Representación Matricial de un Sistema Lineal de 2×2

Un sistema lineal de 2×2 :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

admite la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Sea el Sistema Lineal de 2x2

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 = 31 \\ 3x_1 + 8x_2 = 30 \end{cases}$$

Expresión Matricial del Sistema Lineal de 2x2

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Modo de la Matriz ampliada del Sistema Lineal de 2x2

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 31 \\ 3 & 8 & 30 \end{pmatrix}$$

Clasificación de un Sistema Lineal de 2×2

Sistema Compatible. Un sistema lineal de 2×2 es compatible o consistente si posee al menos una solución.

$$C.S. \neq \emptyset$$

Sistema Compatible Determinado. Un sistema lineal de 2×2 es compatible determinado si posee una única solución.

$$C.S. = \{(x_0, y_0)\}$$

Clasificación de un Sistema Lineal de 2×2

Sistema Compatible Indeterminado. Un sistema lineal de 2×2 es compatible indeterminado si posee infinitas soluciones.

Sistema Incompatible. Un sistema lineal de 2×2 es incompatible o inconsistente si no posee solución.

$$C.S. = \emptyset$$

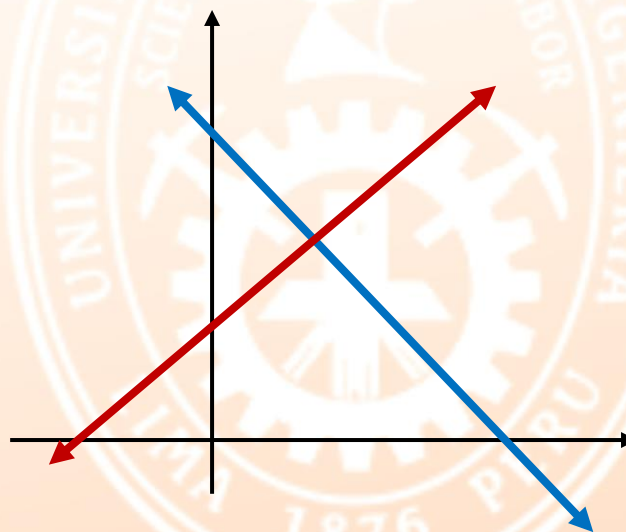
Conjunto solución de un sistema lineal de 2×2 en términos de los coeficientes del sistema

Dado un sistema lineal de 2×2 :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

Solución única. Si $a_{21}, a_{22} \neq 0$, entonces el sistema (1) tiene solución única si y solamente si

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$$



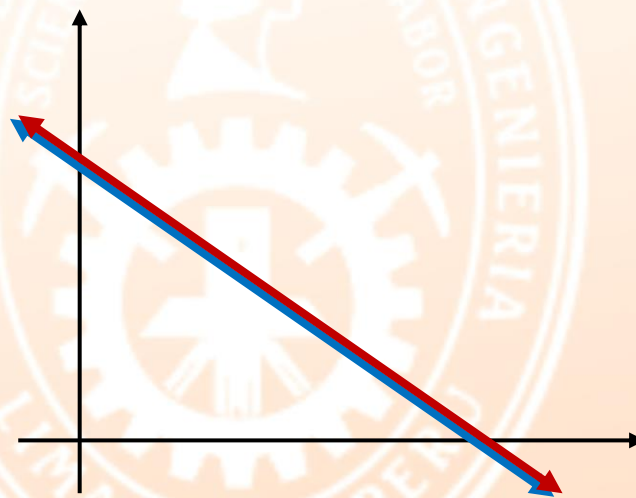
Conjunto solución de un sistema lineal de 2×2 en términos de los coeficientes del sistema

Dado un sistema lineal de 2 ecuaciones y de 2 variables:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

Infinitas Soluciones. Si $a_{21}, a_{22}, b_2 \neq 0$, entonces el sistema (1) tiene infinitas soluciones si y solamente si

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}$$



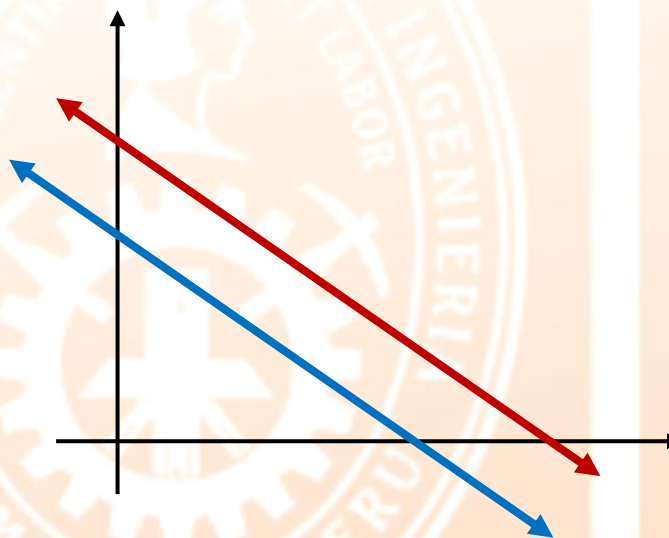
Conjunto solución de un sistema lineal de 2×2 en términos de los coeficientes del sistema

Dado un sistema lineal de 2 ecuaciones y de 2 variables:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

Sistema Incompatible. Si $a_{21}, a_{22}, b_2 \neq 0$, entonces el sistema (1) no tiene solución si y solamente si

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2}$$



Sistemas Lineales Homogéneos de 2×2

Sistema Lineal Homogéneo. Un sistema lineal homogéneo de 2×2 es un enunciado abierto de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y = 0 \end{cases}$$

Donde los $a_{ij} \in \mathbb{R}$ son los coeficientes del sistema, y x, y son las variables.

Teorema. Todo sistema lineal homogéneo de 2×2 :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

es compatible, dado que $(x, y) = (0, 0)$ es siempre una solución del sistema (1), llamada solución trivial del sistema.



Ejercicio

Analice bajo que condiciones el sistema

$$\begin{cases} 3x + (n - 1)y = 12 & (1) \\ (n + 6)x + 6y = n \end{cases}$$

Tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución.

Métodos de solución de un sistema lineal de 2×2

Dado el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

Método de Sustitución. El método de sustitución consiste en despejar una variable de una de las ecuaciones del sistema (1) y sustituir en la otra ecuación, obteniéndose el valor de una variable y nuevamente por sustitución obtenemos el valor de la otra variable.

Ejercicio

Resolver:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 4 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 9 & (2) \end{cases}$$

De la ecuación (2) despejamos la variable y :

$$y = 9 - 3x$$

Luego sustituimos en la ecuación (1):

$$5x - 2(9 - 3x) = 4$$

$$x = 2$$

Sustituyendo en la ecuación (2) obtenemos que:

$$y = 3$$

Por lo tanto el $C.S. = \{(2,3)\}$.

Métodos de solución de un sistema lineal de 2×2

Dado el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

Método de Eliminación. El método de eliminación consiste en multiplicar o dividir las ecuaciones del sistema (1) por un escalar diferente de cero, de modo que se obtenga una misma variable (elegida) en las 2 ecuaciones con coeficientes opuestos, para luego sumar las ecuaciones y eliminar la variable, obteniéndose el valor de la otra variable y luego por sustitución obtenemos el valor de la otra variable.

Ejercicio

Resolver:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 4 & (1) \\ 3x + y = 9 & (2) \end{cases}$$

Multiplicamos la ecuación (2) por 2:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 4 & (1) \\ 6x + 2y = 18 & (3) \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones (1) y (3) :

$$11x = 22$$

$$x = 2$$

Sustituyendo en la ecuación (2) obtenemos que:

$$y = 3$$

Por lo tanto el C.S. = $\{(2,3)\}$.

Métodos de solución de un sistema lineal de 2×2

Dado el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

Método de Igualación. El método de igualación consiste en despejar una misma variable de las 2 ecuaciones del sistema (1) y luego igualarlas, obteniéndose el valor de la otra variable y luego por sustitución obtenemos el valor de la otra variable.

Ejercicio

Resolver:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 4 & (1) \\ 3x + y = 9 & (2) \end{cases}$$

De la ecuación (1) despejamos la variable y :

$$y = \frac{5x - 4}{2}$$

De la ecuación (2) despejamos la variable y :

$$y = 9 - 3x$$

Igualamos las ecuaciones (3) y (4):

$$\frac{5x-4}{2} = 9 - 3x \rightarrow x = 2$$

Sustituyendo en la ecuación (2) obtenemos que:

$$y = 3$$

Por lo tanto el C.S. = $\{(2,3)\}$.